УДК: 519.8 https://doi.org/10.15407/jai2025.02.084

Є. В. Івохін[1], В. В. Гавриленко[2], К. Є. Івохіна[3]
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01033
[2,3]Національний транспортний університет, Україна
вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, м. Київ, 01010
[1]ivohin@knu.ua
[2]vvgavrilenko1953@gmail.com
[3]ivohina@gmail.com
[1]https://orcid.org/0000-0002-5826-7408
[2]https://orcid.org/0000-0001-9682-4204
[3]https://orcid.org/0000-0001-9940-1178

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА НА ОСНОВІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ПІДХОДУ

Анотація. Метою даної роботи є розробка методів розв'язування нечітких задач комівояжера на основі багатокритеріального підходу. Розглянуто варіанти розв'язання багатокритеріальних задач комівояжера, способи зведення задачі до однокритеріальної, підходи для формування компромісного маршруту за допомогою алгоритму Пріма. Розглянуто методи розв'язання нечіткої задачі пошуку найшвидшого маршруту з нечітко заданими величинами тривалості переміщення на транспортній системі. Для подання тривалості використано нечіткі трикутні числа. Нечітка задача комівояжера розглядається як багатокритеріальна, для розв'язання якої використовується метод згортки з ваговими коефіцієнтами впевненості. Розглянуто дискретний варіант задання вагових коефіцієнтів та неперервний аналог. Враховано показники належності значень носія кожного нечіткого числа. Запропоновано результати застосування розробленого методу для розв'язання реальних задач комівояжера, проведено аналіз впливу величини збільшення часу проїзду на остаточний вигляд маршруту.

Розроблений підхід може бути використаний для знаходження розв'язків задачі оптимізації перевезень у транспортній мережі з врахуванням невизначеності параметрів руху та показників суб'єктивної впевненості комівояжера щодо ефективного вибору часових витрат проїзду.

Ключові слова: багатокритеріальні задачі комівояжера, нечітка тривалість проїзду, нечіткі трикутні числа, вагові коефіцієнти, метод згортки.

E. Ivohin[1], V. Gavrylenko[2], K. Ivohina[3]
[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska st., Kyiv, 01033
[2,3]National Transport University, Ukraine
1, M. Omelianovycha-Pavlenka st., Kyiv, 01010
[1]ivohin.1960@gmail.com
[2]vvgavrilenko1953@gmail.com
[3]ivohina@gmail.com
[1]https://orcid.org/0000-0002-5826-7408
[2]https://orcid.org/0000-0001-9682-4204
[3]https://orcid.org/0000-0001-9940-1178

ONE APPROACH TO SOLVING THE FUZZY TRAVELING SALESMAN PROBLEM BASED ON A MULTICRITERIA APPROACH

Abstract. The aim of this work is to develop methods for solving fuzzy traveling salesman problems based on a multi-criteria approach. The paper considers options for solving multi-criteria traveling salesman problems, methods for reducing the problem to a single-criteria problem, and approaches to forming a compromise route using Prim's algorithm. The paper considers methods for solving a fuzzy problem of finding the fastest route with fuzzy specified values of travel time on a transport system. Fuzzy triangular numbers are used to represent the duration. The fuzzy traveling salesman problem is considered as a multi-criteria problem, for which the convolution method with confidence weighting coefficients is used. A discrete version of setting the weighting coefficients and a continuous analog are considered. Membership indicators of the values of the carrier of each fuzzy number are taken into account. The results of applying the developed method for solving

real traveling salesman problems are proposed, and an analysis of the effect of the increase in travel time on the final form of the route is carried out. The developed approach can be used to solve the problem of optimizing transportation in a transport network, taking into account the uncertainty of traffic parameters and indicators of subjective confidence of a traveling salesman regarding the effective choice of travel time costs.

Keywords: multicriterial traveling salesman problems, fuzzy travel time, fuzzy triangular numbers, weighting coefficients, convolution method.

Вступ

Зміст відомої задачі комівояжера [1] полягає у необхідності скласти маршрут руху в рамках заданої сукупності зв'язаних між собою пунктів (міст), що утворюють транспортну мережу, яка складається з n вершин. Циклічний маршрут, за яким комівояжер має відвідати усі міста мережі, має бути оптимальним за часом або довжиною, при чому кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу.

З математичної точки зору, задача комівояжера - комбінаторна задача, для розв'язання якої можна використовувати методи математичного програмування [2].

Проблема пошуку оптимального циклічного маршруту в задачі комівояжера з заданими величинами тривалості пересування t_{ij} між усіма парами міст мережі, які утворюють матрицю $T=\{t_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, зводиться до знаходження розв'язку $X=\{x_{ij}\}$, $x_{ij}\in\{0,1\}$, $i,j=\overline{1,n}$, комбінаторної оптимізаційної задачі [3]

$$E=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_{ij}\to\min \tag{1}$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n},\quad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

що представляє собою класичний варіант постановки задачі, при вирішенні якої в якості критерію окрім довжини або тривалості переміщень між пунктами можуть розглядатися вартість перевезень (проїзду), ефективність руху за маршрутом з урахуванням обсягу або ваги вантажних перевезень тощо. Характерною рисою усіх таких постановок є наявність лише одного критерію оптимальності при виборі маршруту.

Серед узагальнених постановок задачі комівояжера значної уваги привертають задачі, оптимальний маршрут у яких формується з урахуванням декількох критеріїв оптимальності [4]. В якості прикладу, наведемо формулювання задачі комівояжера з двома критеріями, у якій необхідно мінімізувати сумарну відстань та час переміщення за маршрутом. Іншими словами, у постановці задачі комівояжера (1), (2) замість єдиного критерію визначимо два інших

$$F_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}\to\min, \tag{3}$$

$$F_2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_{ij}\to\min, \tag{4}$$

де величини d_{ij} та t_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, є елементами відповідних матриць

$$D=\{d_{ij}\},\ \text{та}\ T=\{t_{ij}\},\ i,j=\overline{1,n},$$

які визначають відстані та тривалість переміщення між усіма парами вершин транспортної мережі.

Зрозуміло, що якщо рухатись на ділянках маршруту з однаковою швидкістю, то час проїзду між довільними містами буде пропорційним відстані між ними. Але такі умови є ідеалізованими. На швидкість руху впливають різні об'єктивні та суб'єктивні фактори (завантаженість транспортного потоку, погодні умови тощо), що вимагає одночасного розгляду обох критеріїв оптимальності. Крім цього, критерії оптимальності можуть бути антагоністичними за своєю сутністю (тобто, покращення розв'язку за одним з критеріїв призводить до його погіршення за іншим).

Таким чином, одним з варіантів двокритеріальної задачі комівояжера є задача пошуку оптимального за довжиною та часом проїзду маршруту на основі критеріїв виду (3), (4) за умови виконання обмежень (2).

Способи розв'язання багатокритеріальних задач комівояжера

Використання декількох критеріїв додатково ускладнює розв'язання задачі комівояжера. Виникають питання щодо формулювання у цьому випадку поняття ефективного розв'язку за умови антагоністичності сформульованих критеріїв та застосування методів розв'язування відповідної задачі.

Типове розв'язування наведеної двокритеріальної задачі можна провести на основі модифікації критеріальних функцій шляхом їх зведення до одного критерію. В якості способу перетворення критеріїв доцільно розглянути величини ефективності переміщення кожною ділянкою транспортної мережі, для чого треба звести вихідну задачу до однокритеріального вигляду (1), (2) з матрицею *R*, елементи якої, наприклад, визначаються співвідношеннями

$$r_{ij} = t_{ij} / d_{ij} , \; i,j = \overline{1,n} \, .$$

Використання відомих методів розв'язання задачі комівояжера дозволяє отримати в цьому випадку компромісний у деякому розумінні маршрут.

Інший загальновідомий спосіб розв'язування оптимізаційних задач з багатьма критеріями базується на зведенні сукупності критеріїв до одного у вигляді згортки [5]. В даному випадку в задачі (3), (4) необхідно визначити коефіцієнти

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1 ,$$

які можна трактувати як вагові коефіцієнти важливості критеріїв, то вихідна задача зводиться до однокритеріальної з цільовою функцією

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \to \min , \qquad (5)$$

з обмеженнями (2).

Двох- та багатокритеріальні задачі комівояжера можуть виникати й у інших ситуаціях. Припустимо, що у традиційній постановці задачі додатково задається умова щодо визначеного порядку проїзду на мережі, наприклад, у вигляді першочерговості відвідування: за маршрутом конкретно визначений вузол *i* має обов'язково передувати іншому заданому вузлу *j*. Така вимога не суттєво ускладнює процес розв'язання задачі, для чого у методах потрібно лише вибраковувати усі розв'язки, в яких не виконується згадана умова.

Нарешті, на особливу увагу заслуговують загальні постановки багатокритеріальних задач комівояжера, в яких окремі критерії оцінюють якість маршруту за різними, не лише транспортними показниками. В якості таких цільових функцій, що найчастіше розглядаються, слід відзначити критерії оцінювання маршруту за економічністю або безпекою переміщення за етапами, формулювання вимог на визначення та порядок відвідування вузлів і кластерів руху тощо. Зрозуміло, що побудова компромісних розв'язків у таких випадках не може бути чітко формалізованою.

Дійсно, в класичній задачі комівояжера з окремими критеріями отримуємо різні варіанти оптимальних маршрутів, які визначаються у вигляді відповідних послідовностей вузлів мережі, а формулювання компромісної послідовності вимагатиме створення правил врахування величин заданих критеріїв та схем модифікації сукупності розв'язків з метою визначення номерів етапів компромісного маршруту. Іншими словами, у цьому випадку потрібно визначити методику проведення змін наявних оптимальних послідовностей з метою узгодження величин критеріїв якості маршруту.

Один з найпростіших способів розв'язання проблеми полягає у застосуванні описаного вище методу розв'язування задачі комівояжера з критерієм у вигляді лінійної згортки цільових функцій. У даному випадку потрібно провести нормалізацію показників руху шляхом зведення до однією шкали.

Натомість, розглянемо підхід, на базі якого можна провести цілеспрямовані перестановки у послідовностях відвідування міст маршруту.

Вважатимемо, що в багатокритеріальній задачі комівояжера розглядається l критеріїв. Для кожного з них отримано оптимальні маршрути у вигляді послідовностей p_k, $k=\overline{1,l}$. Припустимо, що усі маршрути відповідають обмеженням задачі: починаються й завершуються в одному й тому ж вузлі та складаються з номерів вузлів, що не повторюються.

Без обмеження конструктивності можна покласти, що послідовності пунктів маршрутів містять неспівпадаючі між собою підпослідовності (принаймні, одну), які складаються з однієї й тієї ж сукупності вузлів. Такі послідовності описують можливі маршрути переміщень на відповідній підмножині вузлів. Зрозуміло, що початковий і кінцевий вузли в усіх підпослідовностях мають бути однаковими, але послідовності їх номерів не повинні між собою співпадати.

Таким чином, маємо деяку сукупність номерів вузлів мережі $q=\{q_1,q_2,...,q_s\}$, з яких утворюються різні послідовності, що є частинами оптимальних маршрутів комівояжера при різних критеріях p_k, $k=\overline{1,l}$. Правила перестановки вузлів з метою погодження величин критеріїв залишаються невизначеними, а повний перебір неможливий навіть при досить невеликих наборах вузлів (наприклад, при $s>20$).

Тоді розглянемо компроміс у вигляді послідовності, яку отримують в результаті використання деякого додаткового алгоритму, що відноситься до класу оптимізаційних методів і за змістом відповідає постановці вихідної задачі. Для задачі комівояжера в якості такого алгоритму може бути використаний алгоритм на основі методу Пріма [6], який дозволяє побудувати мінімальне кістякове дерево зваженого зв'язного неорієнтованого графа. У якості метрики оптимальності дерева можна обирати показник маршруту, який є найбільш важливим в результаті ранжування важливості усіх критеріїв. Іншим способом формулювання метрики є використання найменш впливового й найчастіше незмінного на мережі показника якості маршруту, наприклад, у вигляді його довжини (відстані між вузлами є сталими величинами, які завжди відомі та практично ніколи не змінюються, на відміну від того часу проїзду, економічних характеристик і т.і.).

Отриманий в результаті роботи такого алгоритму маршрут на множині вузлів q є частиною компромісного маршруту в багатокритеріальній задачі комівояжера.

Метод розв'язання нечіткої задачі комівояжера як двокритеріальної оптимізаційної задачі

У тематиці сучасних досліджень, присвячених пошуку розв'язків в задачі комівояжера, розглядаються питання удосконалення існуючих методів та/чи запровадження нових. Розробка таких методів та алгоритмів базується на спробах

врахувати особливості положень та підходів, пов'язаних з розв'язанням погано структурованих задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності, для формалізації моделей яких використовуються нечіткі числа та величини [7].

У випадку постановки нечіткої задачі комівояжера необхідно знайти циклічну перестановку номерів міст, які має відвідати комівояжер, відповідно до якої затрати часу будуть мінімальні із врахуванням обмеження щодо відвідування кожного з пунктів не більше одного разу. Математичне формулювання нечіткої задачі комівояжера можна записати так: потрібно мінімізувати з урахуванням способу порівняння нечітких величин цільову функцію

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{t}_{ij}x_{ij}\,, \tag{6}$$

де часові витрати на переміщення між пунктами транспортної мережі задаються у вигляді матриці

$$\tilde{T}=\{\tilde{t}_{ij}\}\,,\; i,j=\overline{1,n}\,,$$

з елементами, заданими нечіткими числами, а можливі шляхи переміщень між містами визначаються матрицею X, за умови виконання обмежень (2).

Найбільш конструктивні теоретичні та практичні результати у дослідженнях нечіткої задачі комівояжера отримано на основі використання нечітких чисел трикутного вигляду [8].

Означення. Нечітким трикутним числом $\tilde{b}$ називають впорядковану трійку чисел

$$\tilde{b}=\{(a,b,c)\}\,,\; a\le b\le c\,,$$

для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{b}}(x)$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{x-a}{b-a},x\in[a,b];\;\; \mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{c-x}{c-b},x\in[b,c];\qquad \mu_{\tilde{b}}(x)=0,x\notin[a,c]\,. \tag{7}$$

Нечітке трикутне число вигляду *(a, b, b)*, що називається лівим нечітким трикутним числом [8], визначається функцією належності вигляду

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=0,x<a\,;\;\; \mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{x-a}{b-a},x\in[a,b];\mu_{\tilde{b}}(x)=1,x>b\,,$$

а нечітке трикутне число вигляду *(b, b, c)*, що називається правим нечітким трикутним числом, - функцією належності

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=1,x<b\,;\mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{c-x}{c-b},x\in[b,c];\;\mu_{\tilde{b}}(x)=0,x>c\,.$$

При розв'язанні нечіткої задачі комівояжера передбачається перетворення величин тривалості переміщення

$$\tilde{T}=\{\tilde{t}_{ij}\},\;\; \tilde{t}_{ij}=\tilde{t}_{ji},\; \tilde{t}_{ij}=(t_{ij},t_{ij},t_{ij}+\Delta t_{ij})\,,\; i,j=\overline{1,n}\,,$$

заданих трикутними нечіткими числами, у спеціальний формат подання вигляду [9]. Таке перетворення дозволяє виконувати арифметичні дії над нечіткими числами. Реалізація даного підходу є одним з можливих чинників формування послідовності маршруту в нечіткій задачі комівояжера, враховуючи застосування в методах усереднених значень вхідних нечітких параметрів, розрахованих на основі центрів ваги [10].

Базуючись на підході з використанням декількох критеріїв у задачі комівояжера, розглянемо альтернативний спосіб скаляризації трикутних нечітких величин $\tilde{t}_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$, тривалості проїзду.

Спочатку розглянемо нечітку задачу комівояжера (7), (2) як задачу з двома

критеріями, за якими будемо мінімізувати сумарний час переміщення за маршрутом з гранично заданими величинами тривалості. Іншими словами, у постановці задачі комівояжера замість єдиного критерію визначимо два інших

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min , \quad (8)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (t_{ij} + \Delta t_{ij}) x_{ij} \to \min , \quad (9)$$

де величини t_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, є елементами матриці $T=\{t_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, які визначають номінальний час переміщення між усіма парами вершин транспортної мережі.

Для пошуку компромісного розв’язку використаємо метод згортки. Задаємо вагові коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2 > 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, рівними величинам впевненості комівояжера у граничних термінах тривалості руху, що дозволяє розглядати зважені показники нечітких вхідних величин $\tilde{t}_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$. Розв’язок задачі (8), (9) з двома наборами параметрів t_{ij} та $t_{ij} + \Delta t_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$, відповідно, будемо шукати у вигляді оптимального розв’язку задачі комівояжера вигляду (1), (2) з критерієм

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (t_{ij} + \Delta t_{ij}) x_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_1 t_{ij} + \alpha_2 (t_{ij} + \Delta t_{ij})\} x_{ij} \to \min , \quad (10)$$

з урахуванням умови (2). Відмітимо, що отриманий в результаті компромісний розв’язок буде залежати від обраних значень коефіцієнтів α_1, α_2, який формується з використанням лише носіїв нечітких значень тривалості та не враховує величин відповідних функцій належності.

Не зважаючи на це, отримуємо один з конструктивних варіантів розв’язання нечіткої задачі комівояжера як двокритеріальної задачі пошуку оптимального за часом проїзду маршруту на основі критеріїв виду (8), (9) з урахуванням умов (2).

Метод уточнення результатів розв’язання нечіткої задачі комівояжера

Застосування лише двох критеріїв, які зв’язані з оцінками рівня впевненості комівояжера у діапазонах тривалості руху, не дозволяє в повній мірі використати метод згортки для знаходження маршруту в нечіткій задачі комівояжера (6), (2) як компромісного розв’язку відповідної двокритеріальної задачі.

Узагальнюючи розглянутий вище випадок, визначимо показники впевненості комівояжера за допомогою вагової функції $\alpha(s) \ge 0$, заданої на відрізку $s \in [0,1]$, яка задовольняє співвідношенню

$$\int_0^1 \alpha(s) ds = 1. \quad (11)$$

Запишемо критерій оптимальності у нечіткій задачі комівояжера (6) з використанням вагової функції $\alpha(s) \ge 0$, $s \in [0,1]$, у вигляді:

$$\int_0^1 \alpha(s)\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij}+s\Delta t_{ij})x_{ij}\}ds=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\int_0^1 \alpha(s)(t_{ij}+s\Delta t_{ij})ds\}x_{ij}\to \min . \quad (12)$$

Вважаючи, що функція $\alpha(s)=0$ для всіх $s\notin[0,1]$, інтеграл у фігурних дужках визначає середні значення лінійних функцій $t_{ij}+s\Delta t_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$, з урахуванням величин впевненості, які визначаються функцією $\alpha(s)$. При цьому, для розрахунку середніх значень використовується весь спектр значень $\alpha(s)$, що дозволяє для кожного з інтервалів $t_{ij}+s\Delta t_{ij}$, $s\in[0,1]$, $i,j=\overline{1,n}$, отримати дефазифіковані показники інтервальної невизначеності тривалості переміщень і звести нечітку задачу комівояжера до вигляду (1), (2).

Зауважимо, що формулювання додаткової функції впевненості визначає можливі переваги для значень $t_{ij}+s\Delta t_{ij}$, $s\in[0,1]$, $i,j=\overline{1,n}$, з носіїв заданих нечітких величин часу переміщення, не враховуючи їх невизначеність. Для врахування нечіткого подання інтервалів тривалості необхідно використати відповідні функції належності $\mu_{\tilde{t}_{ij}}(t_{ij}+s\Delta t_{ij})$, $s\in[0,1]$, $i,j=\overline{1,n}$.

Введемо позначення

$$g_{ij}(s)=\mu_{\tilde{t}_{ij}}(t_{ij}+s\Delta t_{ij})\cdot(t_{ij}+s\Delta t_{ij}),\ s\in[0,1],\ i,j=\overline{1,n}.$$

Тоді для довільної вагової функції $\alpha(s)\geq 0$, $s\in[0,1]$ $\alpha(s)$, величини $\int_0^1 \alpha(s)g_{ij}(s)ds$, будуть зваженими середніми значеннями нечітких трикутних чисел $\tilde{t}_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$. Таким чином, отримуємо дефазифіковані значення тривалості проїзду на мережі з урахуванням функцій належності та переваг, визначених функцією $\alpha(s)$, $s\in[0,1]$, а критерій оптимальності (12) для нечіткої задачі комівояжера буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\int_0^1 \alpha(s)g_{ij}(s)ds\}x_{ij}\to \min . \quad (13)$$

Остаточно, задача комівояжера з нечіткою цільовою функцією (6) зводиться до однокритеріальної оптимізаційної задачі з функцією цілі вигляду (13) шляхом використання багатокритеріального підходу та спеціальної лінійної згортки з інтервально заданою ваговою функцією, що дозволяє уточнити розрахунки маршрутів в нечіткій задачі комівояжера.

Приклад оптимізації тривалості маршруту комівояжера в умовах реальної транспортної мережі

В якості реальної прикладної задачі, в якій досліджувалась проблема знаходження оптимального маршруту комівояжера, розглянемо задачу побудови схеми проїзду американської транспортної системи, яка охоплює 20 штатів [11]. Відомі параметри відстані та часу проїзду між 20-ма містами відповідних штатів, що дозволяє розглядати різні постановки оптимізаційних задач щодо перевезення вантажів та пасажирів шляхами даної мережі (табл. 1). В роботі [12] визначений компромісний маршрут руху комівояжера на мережі з урахуванням трьох критеріїв (додатково до тривалості та відстані розглянуто вартість перевезень). Розглядаючи класичну оптимізаційну задачу

комівояжера (1), (2) з єдиним критерієм тривалості проїзду, зауважимо, що часові параметри переміщення між окремими містами за ідеальних умов руху залишаються практично незмінними.

Використовуючи для розв'язання поставленої задачі генетичний алгоритм, отримано розв'язок, за яким оптимальний маршрут задається послідовністю

1-2-6-10-11-7-14-15-17-18-20-19-16-12-9-13-8-5-3-4-1,

загальною тривалістю 8012 одиниць.

Розглянемо нечітку задачу комівояжера виду (6), (2). Визначення величин нечіткої тривалості руху між містами мережі проведемо шляхом випадкового збільшення часу проїзду на 1-5% та на 5-10% від чітко визначених величин (збільшення проводилось випадковим чином). Отже, отримуємо два набори вхідних параметрів нечіткої задачі комівояжера, які задаються відповідними нечіткими правими трикутними числами, для яких знайдено оптимальний за часом маршрут (див. табл. 2, у відповідних стовбцях наведено отримані при цьому значення тривалості, тривалості+5%, тривалості+10% для етапів оптимального маршруту).

Розглянемо результати розв'язання нечіткої задачі комівояжера як двокритеріальної задачі вигляду (8), (9) з відповідними обмеженнями. Проведемо скаляризацію нечітких величин $\tilde{t}_{ij}$, $i,j=\overline{1,20}$, тривалості руху між містами, заданих

Таблиця 1. Дані тривалості переміщення між містами транспортної системи

№ з/п		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Washington	California	Arizona	Colorado	New Mexico	Nevada	Texas	Oklahoma	Iowa	Montana
1	Washington	0	245	285	232	340	950	1800	1740	1500	700
2	California	245	0	81	111	122	718	1180	1240	1500	1170
3	Arizona	285	81	0	76	44	810	780	850	1260	1240
4	Colorado	232	111	76	0	52	850	690	660	650	700
5	NewMexico	340	122	44	52	0	920	400	480	910	1020
6	Nevada	950	718	810	850	920	0	1260	1320	1380	990
7	Texas	1800	1180	780	690	400	1260	0	300	750	1230
8	Oklahoma	1740	1240	850	660	480	1320	300	0	520	1190
9	Iowa	1500	1500	1260	650	910	1380	750	520	0	1000
10	Montana	700	1170	1240	700	1020	990	1230	1190	1000	0
11	Minnesota	1250	1680	1620	930	1220	1500	117	830	350	740
12	Indiana	1835	1860	1500	990	1090	1740	920	660	380	1300
13	Missouri	1740	1500	1120	750	760	1500	590	350	320	1240
14	Louisana	2160	1680	1190	1060	830	1680	460	430	850	1680
15	Alabama	2280	1920	1400	1326	1050	1980	680	650	800	1800
16	Kentucky	2100	1980	1500	1060	1200	1860	920	720	540	1500
17	Georgia	2400	2160	1680	1415	1322	2160	930	820	880	1920
18	Florida	2580	2400	1920	1740	1560	2460	1130	1100	1150	2220
19	New York	2460	2520	2160	1560	1740	2400	1560	1250	950	1920
20	Virginia	2400	2340	1920	1500	1500	2280	1170	1010	890	1860

сукупністю впорядкованих трійок $(t_{ij}, t_{ij}, t_{ij} + \Delta t_{ij})$, $i,j=\overline{1,20}$, у вигляді зважених показників $\bar{t}_{ij}$, $i,j=\overline{1,20}$, значення яких формується на основі застосування згортки за допомогою двох вагових коефіцієнтів $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$:

$$\bar{t}_{ij} = \alpha_1\, t_{ij} + \alpha_2\, (t_{ij} + \Delta t_{ij}),\ i,j = \overline{1,20}.$$

Використання цих коефіцієнтів відповідає показникам рівня впевненості комівояжера у термінах тривалості руху та дозволяє розглядати зважені середні значення інтервалів тривалості переміщень в якості параметрів однокритеріальної задачі вигляду (1), (2).

В результаті реалізації описаного в роботі підходу отримано оптимальний маршрут руху комівояжера на заданій транспортній мережі з нечіткими параметрами проїзду між містами (табл. 3).

Таблиця 1. (продовження)

№ з/п		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		Minnesota	Indiana	Missouri	Louisana	Alabama	Kentucky	Georgia	Florida	NY	Virginia
1	Washington	1250	1835	1740	2160	2280	2100	2400	2580	2460	2400
2	California	1680	1860	1500	1680	1920	1980	2160	2400	2520	2340
3	Arizona	1620	1500	1120	1190	1400	1500	1680	1920	2160	1920
4	Colorado	930	990	750	1060	1326	1060	1415	1740	1560	1500
5	NewMexico	1220	1090	760	830	1050	1200	1322	1560	1740	1500
6	Nevada	1500	1740	1500	1680	1980	1860	2160	2460	2400	2280
7	Texas	117	920	590	460	680	920	930	1130	1560	1170
8	Oklahoma	830	660	350	430	650	720	820	1100	1250	1010
9	Iowa	350	380	320	850	800	540	880	1150	950	890
10	Montana	740	1300	1240	1680	1800	1500	1920	2220	1920	1860
11	Minnesota	0	620	660	1160	1110	800	1190	1560	1180	1199
12	Indiana	620	0	320	760	510	200	590	870	630	520
13	Missouri	660	320	0	600	560	380	660	960	910	740
14	Louisiana	1160	760	600	0	370	710	600	690	1256	890
15	Alabama	1110	510	560	370	0	420	260	490	890	570
16	Kentucky	800	200	380	710	420	0	420	700	600	380
17	Georgia	1190	590	660	600	260	420	0	340	760	460
18	Florida	1560	870	960	690	490	700	340	0	940	690
19	New York	1180	630	910	1256	890	600	760	940	0	400
20	Virginia	1199	520	740	890	570	380	460	690	400	0

Таблиця 2. Оптимальна тривалість маршруту у нечітких задачах комівояжера

Опт. час	***T*=8012**	***T*=8214,95**	***T*=8426,03**	
Початок руху	Тривалість	Тривалість+5%	Тривалість+10%	Кінець руху
1	245	251.74	263.4	2
2	718	733.43	757	6
6	990	1016.52	1033.28	10
10	740	761.97	791.8	11
11	117	120.4	122.49	7
7	460	472.68	490.17	14
14	370	377.86	384.89	15
15	260	265.45	268.14	17
17	340	348.02	361.07	18
18	690	707.03	719.23	20
20	400	408.93	422.74	19

19	600	617.67	625.87	16
16	200	204.51	207.13	12
12	380	389.19	406.65	9
9	320	327.68	335.14	13
13	350	359.09	370.49	8
8	480	491.72	496.8	5
5	44	44.95	45.79	3
3	76	78.06	81.81	4

Таблиця 3. Тривалість маршруту у нечітких задачах комівояжера

Опт. час	***T***=8012	***T***=8214.95		***T***=8147.3	***T***=8426.03		***T***=8285.31	
Початок руху	Чітко задана тривалість	Тривалість +5%	Ваг.коеф. α_1=1/3 α_2=2/3	Зважене значення	Тривалість +10%	Ваг. коеф. α_1=2/3 α_2=1/3	Зважене значення	Кінець руху
1	245	251.74	251.74	249.49	263.4	258.67	255.63	2
2	718	733.43	732.46	728.29	757	747.21	741.29	6
6	990	1016.52	1007.79	1007.68	1033.28	1025.90	1022.11	10
10	740	761.97	759.45	754.65	791.8	779.41	771.91	11
11	117	120.4	119.26	119.27	122.49	121.56	121.10	7
7	460	472.68	471.31	468.45	490.17	482.90	478.51	14
14	370	377.86	375.87	375.24	384.89	381.83	380.20	15
15	260	265.45	263.44	263.63	268.14	266.93	266.35	17
17	340	348.02	347.76	345.35	361.07	355.70	352.37	18
18	690	707.03	701.83	701.35	719.23	713.86	711.10	20
20	400	408.93	408.42	405.95	422.74	417.02	413.53	19
19	600	617.67	611.01	611.78	625.87	622.22	620.40	16
16	200	204.51	202.96	203.01	207.13	205.96	205.38	12
12	380	389.19	389.67	386.13	406.65	399.59	395.01	9
9	320	327.68	325.91	325.12	335.14	331.93	330.17	13
13	350	359.09	357.76	356.06	370.49	365.69	362.89	8
8	480	491.72	487.21	487.81	496.8	494.53	493.41	5
5	44	44.95	44.71	44.63	45.79	45.43	45.23	3
3	76	78.06	78.12	77.37	81.81	80.30	79.31	4
4	232	238.05	236.13	236.03	242.14	240.33	239.41	1

Дослідження результатів чисельного експерименту надали, з одного боку, висновок, за яким одночасне збільшення тривалості переміщення в межах 10% не змінює послідовності відвідувань пунктів мережі, що в цілому відповідає змісту розв’язання проблеми комівояжера. З іншого боку, наведений у роботі підхід підвищує конструктивність методів розв’язування нечітких задач комівояжера шляхом уточнення дефазифікованих показників часу переміщень.

Література

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – К.: «Слово», 2006. – 815 с.

2. Ajay D. Kshemkalyani, Mukesh Singhal. Distributed Computing: Principles, Algorithms, and Systems. - Cambridge University Press, 2011. DOI: 10.1017/CBO9780511805318

3. Vanderbei R. J. Linear programming: Foundations and extensions. - Springer, 2014. – 414 p.

4. Golden B., Raghavan S., Wasil E. The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges. – Springer New York, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8

5. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction (10th Edition). – Pearson Education Limited, 2017. – 849 p.

6. Seth Pettie, Vijaya Ramachandran An optimal minimum spanning tree algorithm // Journal of ACM, 2002. – V.49. – Iss. 1. – P.16-34. DOI: 10.1145/505241.50524

7. Зайченко Ю. П. Нечіткі моделі та методи в інтелектуальних системах, Київ: «Слово», 2008. – 344с.

8. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.

9. Гавриленко В. В., Івохін Є. В., Івохіна К. Є., Юштін К. Е. Моделі оптимізації транспортних та мережевих потоків в задачах підтримки прийняття рішень в інформаційних управляючих системах/ Розділ монографії «Інноваційні тенденції розвитку інформаційних управляючих систем і технологій» за загальною редакцією Устенко С. В. - Київ, КНЕУ, 2023.

10. Van Broekhoven, E., De Baets, B. Fast and accurate center of gravity defuzzification of fuzzy system outputs defined on trapezoidal fuzzy partitions// Fuzzy Sets and Systems, 2006. - V. 157. - Iss. 7. – P. 904-918.

11. Syswerda, G., Schedule Optimization Using Genetic Algorithms// in book "Yandbook of Genetic Algorithms", Van Nostran Reynolds, NY, 1991, pp.332-349.

12. Barraq Subhi Kaml, Mohamed Saad Ibrahim. Solving the Multi-Objective Travelling Salesman Problem with Real Data Application // Journal of Al-Nahrain University, 2018. - Vol.21 (3). – Pp. 146-161. DOI: 10.22401/JNUS.21.3.18

References

1. Zaichenko Yu. P. Operations research / Yu. P. Zaichenko. – Kyiv: «Slovo», 2006. – 815 p.

2. Ajay D. Kshemkalyani, Mukesh Singhal. Distributed Computing: Principles, Algorithms, and Systems. - Cambridge University Press, 2011. DOI: 10.1017/ CBO9780511805318

3. Vanderbei R. J. Linear programming: Foundations and extensions. - Springer, 2014. – 414 p.

4. Golden B., Raghavan S., Wasil E. The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges. – Springer New York, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8

5. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction (10th Edition). – Pearson Education Limited, 2017. – 849 p.

6. Seth Pettie, Vijaya Ramachandran An optimal minimum spanning tree algorithm // Journal of ACM, 2002. – V.49. – Iss. 1. – P.16-34. DOI: 10.1145/505241.50524

7. Zaichenko Yu. P. Fuzzy models and methods in intelligent systems, Kyiv: «Slovo», 2008. – 344 p.

8. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. – V.21. – No.2. – P. 243-268.

9. Gavrylenko V. V., Ivohin E. V., Ivonina K. T., Yushtin K. E. Models of optimization of transport and network flows in problems of decision support in information management systems / In book «Innovative trends in the development of information management systems and technologies» by general editor Ustenko S. V. - Kyiv, KNEU, 2023.

10. Van Broekhoven, E., De Baets, B. Fast and accurate center of gravity defuzzification of fuzzy system outputs defined on trapezoidal fuzzy partitions // Fuzzy Sets and Systems, 2006. - V. 157. - Iss. 7. – P. 904-918.

11. Syswerda, G., Schedule Optimization Using Genetic Algorithms// In book "Handbook of Genetic Algorithms", Van Nostran Reynolds, NY, 1991, pp. 332-349.

12. Barraq Subhi Kaml, Mohamed Saad Ibrahim. Solving the Multi-Objective Travelling Salesman Problem with Real Data Application // Journal of Al-Nahrain University, 2018. - Vol.21 (3). – Pp. 146-161. DOI: 10.22401/JNUS.21.3.18.

The article has been sent to the editors 17.05.25.
After processing 30.05.25.
Submitted for printing 30.06.25.